

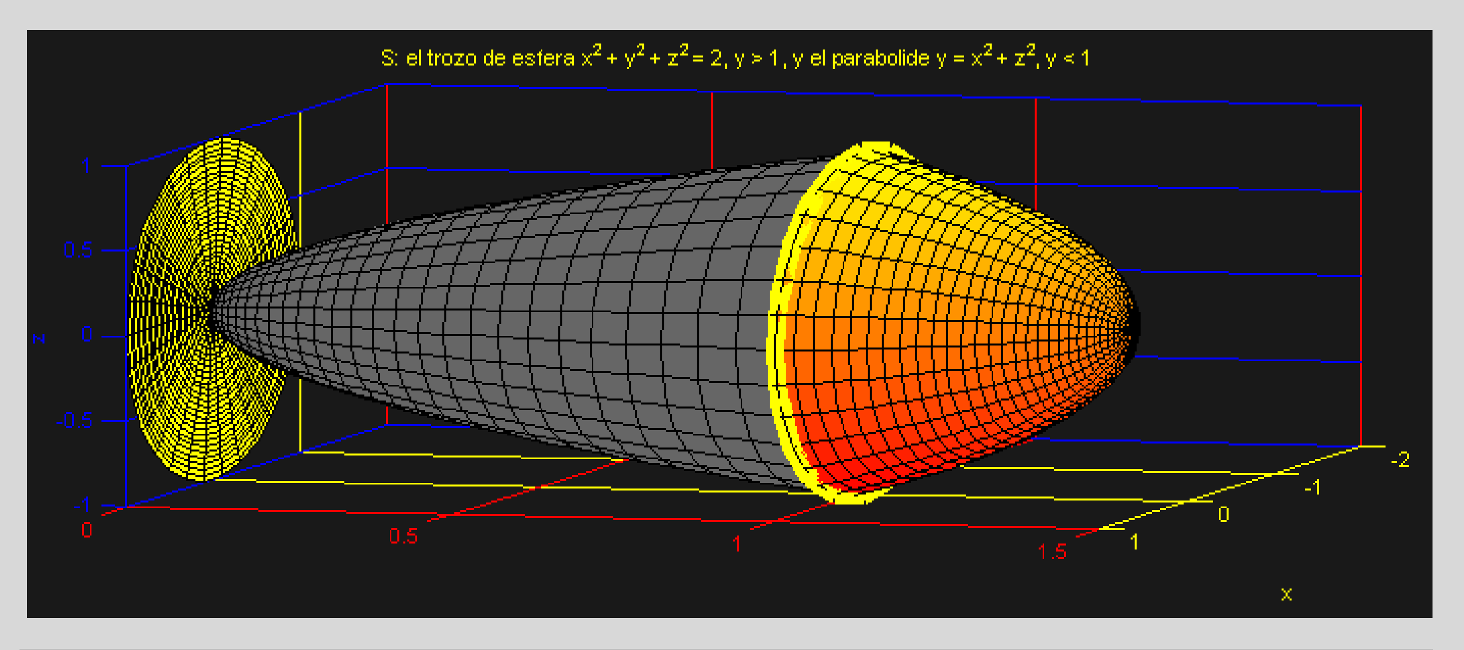
En este documento sólo se presenta un esquema mínimo, un 'guión-esqueleto' de la resolución. El alumno encontrará provechoso encarnarlo con todo lo que no tiene: justificaciones, gráficos, explicaciones, detalles, observaciones y comentarios, convirtiéndolo en una resolución por derecho propio.

Ejercicio 1. Sea C la curva plana determinada por la línea de campo de $\bar{f}(x,y) = (2y, -\frac{x}{2})$ que pasa por $P_o = (0, 1)$. Calcular la circulación del campo vectorial sobre la curva C orientada positivamente.

Si $\bar{\gamma}(t) = (x(t), y(t))$ es una parametrización regular de la curva C, $\bar{f}(\bar{\gamma}(t)) = \bar{\gamma}'(t)$, y eliminando el parámetro resulta la ecuación diferencial $x\,dx + 4\,y\,dy = 0$, esto es $x^2 + 4y^2 = k$, y de la condición de pasar por P_0 es $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, elipse de semiejes 1 y 2 (y por lo tanto área 2π). Aplicando el teorema de Green, es $\int_C \bar{f} \cdot \overline{dl} = -\frac{5}{2}\, área(s) = -5\pi$.

Ejercicio 2. Calcular la masa del macizo $\mathcal{M} \stackrel{\text{def}}{=} \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \le 2, x^2 + z^2 \le y\}$ si su densidad en cada punto es el doble de la distancia de ese punto al plano xz.

La densidad es $\delta(x,y,z) = 2y$, dado que $y \ge 0$ en todo punto de $\mathcal{M}$, de modo que la masa es $m = \iiint_{\mathcal{M}} \delta dV$, y entonces, considerando que la proyección de $\mathcal{M}$ sobre el plano xz es el círculo (señalado en amarillo en la figura) unitario, es $m = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r dr \int_{r^2}^{\sqrt{2-r^2}} 2y\, dy = \frac{7}{6}\pi$.

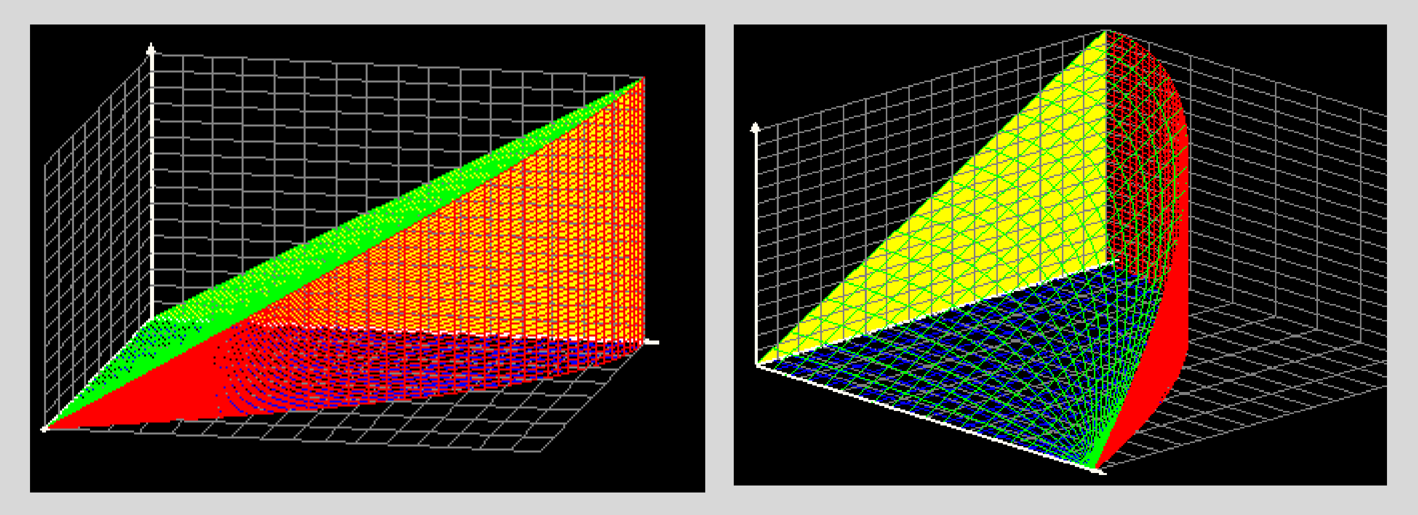


Ejercicio 3. Sea $\bar{f} = \nabla \times \bar{g}, \bar{g} \in C^1(\mathbb{R}^3)$, con $\bar{g}$ un campo vectorial tal que $\bar{g}(x,y,0) = (-y, x, e^{xy})$, y S_k la superficie, para todo k real positivo dada por $z = k(4 - x^2 - y^2), z \ge 0$, orientada con campo de normales tal que $\breve{n} \cdot (0,0,1) < 0$. Calcular el flujo de $\bar{f}$ a través de S_k y probar, sin utilizar la expresión de $\bar{g}$, que es independiente de k.

El flujo de $\bar{f}$ es independiente de k, pues todas las superficies S_k tienen el mismo borde, y por Stokes, iguala a la circulación de $\bar{g}$ sobre ese borde C, convenientemente orientado. Con $\bar{\gamma}(t) = (2sen\,(t), 2\cos(t), 0), t \in [0, 2\pi)$ parametrizando esa curva, el flujo es $\iint_{S_k} \bar{f} \cdot \breve{n} dS = \int_C \bar{g} \cdot \overline{dl} = \int_0^{2\pi} \bar{g}\big(\bar{\gamma}(t)\big) \cdot \bar{\gamma}\,'(t)\, dt = -8\pi$.

Ejercicio 4. Sean S el trozo de superficie cilíndrica de ecuación $y = 4 - x^2, z \le y$ en el primer octante, orientada con el campo de normales tal que $\breve{n} \cdot (1,0,0) > 0$ y el campo $\bar{f}(x,y,z) = (6ay, -6a^2xy, xz), con\ a$ constante real. Hallar el área de $\mathcal{R}$, la proyección de S sobre el plano yz, y determinar un valor de a, siempre que exista, para que el flujo de $\bar{f}$ a través de S sea 8 veces el área de dicha proyección.

La proyección de S (señalada en rojo) sobre el plano yz es un triángulo (señalado en amarillo) rectángulo de catetos iguales a 4, de modo que el área de $\mathcal{R}$ es 8. La segunda parte es un cálculo directo (no muy directo) del que resulta $a = 1$.



Ejercicio 5. Hallar los extremos de $f(x,y) = x^2 + y^2$ restringido al arco de curva dado en coordenadas polares por la ecuación $r = 2\cos(\theta)$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$. Graficar el arco de curva e interpretar geométricamente.

Es $r = 2\cos(\theta)$ *sii* $r^2 = 2r\cos(\theta)$, esto es la circunferencia centrada en (1, 0) de radio 1, de ecuación $x^2 + y^2 = 2x$, y considerando la variación del argumento (cuidado, no se mide desde el centro de la circunferencia), resulta el cuarto de circunferencia en el que $x \geq 1, y \geq 0$. Como se está extremando el cuadrado de la distancia al origen de coordenadas, es inmediato que el máximo es 4, que se alcanza en (2, 0) y el mínimo es 2, que se alcanza en (1, 1).

